

Rachunek prawdopodobieństwa - zadania

1. Kombinatoryka

- Ćwiczenie 1. Ile różnych ciągów można utworzyć z liter słowa MATEMATYKA?
- Ćwiczenie 2. Do 3 szuflad wrzucamy 9 kul. Na ile sposobów można rozmieścić te kule? (Kule i szuflady są rozróżnialne.)
- Ćwiczenie 3. Na ile sposobów można zakwaterować 4 osoby w 5 jednoosobowych pokojach?
- Ćwiczenie 4. Rzucamy kostką 2 razy, zapisując wyniki w kolejności rzutów. W ten sposób wynikiem doświadczenia jest para liczb od 1 do 6. Ile wyników tej postaci można uzyskać?
- Ćwiczenie 5. Na ile sposobów można wylosować kolejno 5 kart bez zwracania z talii 52 kart?
- Ćwiczenie 6. Ile liczb 5-cyfrowych można utworzyć z cyfr 1, 2, 8?
- Ćwiczenie 7. Sieć komputerowa składa się z n -komputerów połączonych szeregowo. Na ile sposobów można ustawić komputery?
- Ćwiczenie 8. Do biegu przystąpiło 6 zawodników o numerach 1,2,3,4,5,6. Za wynik biegu uważamy kolejność przybycia zawodników na metę. Ile może być wyników biegu przy założeniu, że pierwsze miejsce zajmie zawodnik z numerem 3?
- Ćwiczenie 9. Na ile sposobów można podzielić dziewiętnastu studentów na 5 zespołów, w tym 2 zespoły po pięcioro i 3 zespoły po troje osób tak, że każdy zespół studiuje inny spośród 5 danych tematów?
- Ćwiczenie 10. Obliczyć liczbę możliwych rozdań przy grze w brydża.
- Ćwiczenie 11. Obliczyć liczbę różnych flag utworzonych przez trzy poziome różnokolorowe pasy, których kolory można wybrać spośród 6-ciu kolorów.
- Ćwiczenie 12. Na parterze dziesięciopiętrowego domu do windy wsiadło 8 osób. Obliczyć liczbę sposobów, na jakie osoby te mogą wysiąść z windy (pod uwagę bierzemy tu jedynie numery pięter, na których wysiadają poszczególne osoby).
- Ćwiczenie 13. Obliczyć liczbę takich numerów tablic rejestracyjnych, które na początku mają dowolne trzy duże litery alfabetu łacińskiego (alfabet ten ma 26 liter), a następnie dowolne cztery cyfry

2. Prawdopodobieństwo

- Ćwiczenie 14. Losowo rozmieszczono 10 kul w 10 urnach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna urna jest pusta?
- Ćwiczenie 15. Rzucamy dwie kostki do gry. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma oczek jest liczbą nieparzystą, a B niech oznacza zdarzenie polegające na tym, że choćby na jednej kostce wypadła jedynka. Opisać zdarzenia AB , $A \cup B$, $(AB)'$. Znaleźć ich prawdopodobieństwa przy założeniu, że wszystkie wyniki mają jednakowe prawdopodobieństwo.
- Ćwiczenie 16. Rzucamy 3 razy kostką sześcienną. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia $A = \text{"choć raz wypadła 6"}$?

- Ćwiczenie 17. Z tali 52 kart losujemy jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta karta będzie w kolorze pik, lub będzie figura król lub as.
- Ćwiczenie 18. 9 osób $\{a,b,c,..g,h,i\}$ siada przy okrągłym stole na dziewięciu miejscach ponumerowanych liczbami 1,2,3...9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoby a, b będą siedziały obok siebie?
- Ćwiczenie 19. Rzucamy 10 razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że choć raz dostaniemy orła?
- Ćwiczenie 20. W urnie jest 9 kul ponumerowanych od 1 do 9. Losujemy bez zwracania dwie kule. Pierwsza z nich jest traktowana jako liczba jedności, a druga jako liczba dziesiątek. Jakie jest prawdopodobieństwo że wylosowano liczbę parzystą?
- Ćwiczenie 21. Rzucamy kolejno 3 razy kostką sześcienną do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że choć raz uzyskamy 5 lub 6 oczek.
- Ćwiczenie 22. Rzucamy 10 razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dziesięciu rzutach dokładnie 4 razy pojawi się orzeł?

Schemat Bernoulliego.

Schematem Bernoulliego nazywamy wieloetapowe doświadczenie polegające na n-krotnym powtórzeniu tego samego doświadczenia cząstkowego w niezmiennych warunkach i niezależnie od siebie, przy czym każde doświadczenie cząstkowe może być zakończone jednym z dwóch wyników: sukces lub porażka.

p – prawdopodobieństwo sukcesu

q – prawdopodobieństwo porażki

n – ilość prób

k – ilość prób zakończonych sukcesem

Wzór na prawdopodobieństwo, że w serii n doświadczeń sukces zaistnieje k razy:

$$P(A) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

- Ćwiczenie 23. Doświadczenie A polega na rzucie symetryczną kostką do gry. Doświadczenie jest powtarzane 15 razy, a wyrzucenie szóstki będzie sukcesem. Zakładamy, że zdarzenia w tej serii prób są niezależne. Ile wynosi prawdopodobieństwo wyrzucenia trzech szóstek?
- Ćwiczenie 24. Pewien egzamin testowy składa się z 20 pytań, do których podano przykładowe 4 odpowiedzi, ale tylko jedna z nich jest poprawna. Student losowo zaznacza odpowiedzi. Prawdopodobieństwo zaznaczenia dowolnej z odpowiedzi niech wynosi $1/4$ dla wszystkich pytań. Załóżmy, że zdarzenia w tym doświadczeniu są niezależne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że student zaznaczy co najmniej 10 poprawnych odpowiedzi?

3. Prawdopodobieństwo warunkowe

- Ćwiczenie 25. Ze zbioru rodzinz dwójgim dzieci losujemy jedną rodzinę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana rodzina posiada chłopca i dziewczynkę, jeżeli wiemy, że

- młodsze dziecko jest dziewczynką
- jest co najmniej jedna dziewczynka

Zakładamy, że prawdopodobieństwa urodzenia chłopca i dziewczynki są takie same.

- Ćwiczenie 26. Wykonujemy dwukrotny rzut monetą. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia chociaż jednego orła, jeżeli wypadły dwa orły.

Ćwiczenie 27. W urnie są 3 kule białe i 2 czarne. Wyjmujemy z niej najpierw jedną kulę, a potem drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania 2 kul białych jeżeli wiadomo, że druga kula jest biała?

Ćwiczenie 28. Sieć składa się z dwóch rozróżnialnych komputerów. W danej chwili komputer może wykonywać obliczenia (pracować) lub być w stanie uśpienia. Jaka jest szansa tego, że komputer 1 jest w stanie uśpienia, gdy wiemy, że sieć pracuje.

Ćwiczenie 29. W urnie mamy 8 kul białych i 6 kul czarnych. Wyciągamy jedną kulę i wyrzucamy (nie podglądając). Jakie jest prawdopodobieństwo, że w następnym ciągnięciu wylosujemy kulę białą.

Ćwiczenie 30. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania w dwóch rzutach kostką sześcienną trzech oczek, jeśli wiadomo, że w pierwszym rzucie wypadło jedno oczko.

4. Prawdopodobieństwo całkowite

Ćwiczenie 31. Wśród 9 czekoladek 3 są zatrute (po spożyciu następuje natychmiast zgon). Wraz z przyjacielem bawicie się w taka oto grę: kolejno zjadacie po jednej czekoladce. Obliczyć prawdopodobieństwo, że

- jeśli Ty zaczynasz, to przeżyjesz;
- jeśli Ty zacząłeś i przeżyłeś, to i Przyjaciel przeżyje;
- jeśli Ty zacząłeś i nie przeżyłeś, to Przyjaciel przeżyje;
- jeśli Przyjaciel zaczyna, to Ty przeżyjesz;
- jeśli Ty zaczynasz, to przeżyjesz, wiedząc, że Przyjaciel przeżyje.

Ćwiczenie 32. Dane są dwie urny. Pierwsza zawiera 4 kule białe i 5 czarnych, a druga 5 białych i 4 czarne. Wylosowano jedną kulę z pierwszej urny i przeniesiono do drugiej, bez sprawdzania koloru. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z drugiej urny?

5. Twierdzenie Bayesa

Ćwiczenie 33. W pewnym sklepie jest 230 żarówek wyprodukowanych przez trzy fabryki: 100 żarówek z fabryki F1, 50 z fabryki F2 i 80 z fabryki F3. Wiadomo, że fabryka F1 produkuje 3% braków, fabryka F2 - 2% braków, a F3 - 4% braków. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zakupiona wadliwa żarówka pochodzi z 2-tej fabryki?

Ćwiczenie 34. W pewnej Uczelni dziewczęta stanowią $\frac{1}{6}$ ogółu studentów. Wśród dziewcząt co czwarta ma bardzo dobre stopnie, podczas gdy wśród chłopców tylko 1 na 10 ma bardzo dobre wyniki. Wylosowano studenta X z bardzo dobrymi stopniami. Co jest bardziej prawdopodobne to, że X jest dziewczyną, czy to, że X jest chłopcem?

6. Niezależność zdarzeń

Ćwiczenie 35. Rzut 2 kostkami. Zdarzenia: A – pierwsza kostka parzysta, B – druga kostka nieparzysta, C – obie kostki parzyste lub obie nieparzyste. Sprawdź czy zdarzenia są niezależne parami. Czy są łącznie niezależne?

Ćwiczenie 36. Rozważmy doświadczenie polegające na losowaniu 2 kart z 52-elementowej talii kart bez zwracania. Czy zdarzenia A = "za pierwszym razem wylosowano asa", B = "za drugim razem wylosowano asa" są niezależne?